# Interrogation n°2 — Corrigé (sujet A)

NOM : ................................................................ Prénom : ................................................................ Note :

**1)** Soit $f : E \to F$. Donner la définition en termes de quantificateurs de "$f$ est injective".

Cf cours.

**2)** Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$. Donner la définition en termes d'ensemble de $f^{-1}(B)$.

Cf cours.

**3)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (-x, x+2y)$. Est-ce que $f$ est injective ? surjective ? bijective ?

Vérifions si $f$ est injective. Soit $(x,y)$ et $(x',y')$ deux couples de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(x',y') &\implies \begin{cases} -x = -x' \\ x+2y = x'+2y' \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x = x' \\ 2y = 2y' \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \\
&\implies (x,y) = (x',y')
\end{aligned}$$

Donc $f$ est injective. Vérifions si $f$ est surjective. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $x = -a$ et $y = \dfrac{b-a}{2}$.

$$f(x,y) = (-x, x+2y) = (a, -a+b-a) = (a,b)$$

Ainsi, $f$ est surjective. Comme $f$ est injective et surjective, on en déduit que $f$ est bijective.

Pour montrer la bijectivité, on aurait également pu résoudre $f(x,y) = (a,b)$ et montrer que $(x,y) = \left(-a, \dfrac{b-a}{2}\right)$ est l'unique solution.

# Interrogation n°2 — Corrigé (sujet B)

NOM : ................................................................ Prénom : ................................................................ Note :

**1)** Soit $f : E \to F$. Donner la définition de "$f$ est surjective".

Cf cours.

**2)** Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. Donner la définition en termes d'ensemble de $f(A)$.

Cf cours.

**3)** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Est-ce que $f$ est injective ? surjective ? bijective ?

Vérifions si $f$ est injective. On remarque que $f(1) = \dfrac{1-1}{2} = 0$ et $f(0) = \dfrac{0}{2} = 0$. Or, $1 \neq 0$. Ainsi, $f$ n'est pas injective.

Vérifions si $f$ est surjective. Soit $y \in \mathbb{N}$. On pose $n = 2y \in \mathbb{N}$. Alors (comme $n$ est pair)

$$f(n) = \frac{2y}{2} = y$$

D'où $f$ est surjective (on a trouvé un antécédent, ça suffit ! Pas besoin de trouver un antécédent impair de $y$).

Comme $f$ n'est pas injective, elle n'est pas non plus bijective.